

多目标规划与福利评判标准^①

韩 松

(中国人民大学信息学院运筹学与数量经济研究所, 北京, 100872)

摘 要 福利经济学的目标, 是评价各种经济状态的“好”与“坏”. 经济学家根据福利标准, 进行政策评价. 因此, 关于福利标准的研究是福利经济学中的重要问题之一. 帕累托最优是任一社会的最优经济状态都应满足的最起码和最没有争议的福利标准, 但有时并不能反映真实的经济情况. 本文通过建立社会福利最优的多目标规划模型, 用多目标规划理论, 对社会福利最优状态和福利标准进行探讨, 将帕累托最优标准推广到弱帕累托最优和非支配最优.

关键词 多目标规划, 帕累托最优, 弱帕累托最优, 非支配最优

§1 引 言

福利经济学(welfare economics)的目标, 是评价各种经济状态的社会合意性(“好”和“坏”). 经济状态是指经济活动和经济资源的具体安排. 每一种状态都是以资源的不同配置和经济活动的不同分配为特征的. 对于不同的经济状态, 进行政策评价是有用的. 例如, 在两种不同的商品集合和要素价格上, 经济都能达到均衡. 社会从它们中选择, 假使其他标准不能做出选择, 就只有根据福利标准进行选择.

从广泛的意义上讲, 一个社会的福利, 取决于所有消费者的满足水平^①. 但是, 几乎是福利经济学家们评判的每一种选择, 都会对某些人产生有利的影响, 对另一些人产生不利的影响. 在这种情况下, 经济学家关心的是资源的有效配置, 即只着重分析可明确改进福利的情形.

配置是由每个消费者的特定消费水平和每个生产者的特定投入与产出水平来规定的. 帕累托最优(Pareto optimality)提供了任一社会的最优状态都应满足的最起码和最没有争议的福利标准. 如果在不减少其他人的效用的情况下, 生产和分配的重新组织, 不可能增加某个人或更多人的效用, 则这种配置状态处于帕累托最优状态. 这一概念体现了经济效率思想, 是对社会上不存在浪费的思想的一种形式化, 因此又称为帕累托效率. 帕累托最优将经济效率问题与财富分配问题区分开来, 它只给出了经济状态是否有效率的评判标准, 而不能评判财富分配是否“公平”. 后一个问题是一个容易引起人们争论的(并具有政治性的)问题. 例如, 某个社会可能在一个消费者拥有全部物品的 99% 时实现帕累托最优配置, 但是显然, 大多数人并不认为这是一种令人满意的配置状态.

帕累托最优是评判经济状态是否有效率的最基本的标准, 有时并不能反映真实的经济情况. 关于福利标准的研究一直是福利经济学中的重要问题之一. 但是, 由于福利经济学属于规

① 收稿日期: 2003- 09- 09; 修改稿: 2004- 08- 24

①这里我们重点分析的经济福利, 即可以直接或间接用货币来衡量的部分.

范经济学范畴, 关于福利标准经常涉及价值观、道德、政治等因素, 经济学家很难用模型化方法进行分析. 本文通过建立社会福利最优的多目标规划模型, 用多目标规划的概念和理论, 对社会福利最优状态和福利标准进行探讨. 应用多目标规划中的关于有效解的不同定义, 给出了不同的福利评判标准, 并推导它们的最优条件. 它们是帕累托最优、弱帕累托最优、非支配最优.

§ 2 福利最优的多目标规划模型

设多人社会有多种资源配置状态, A, B 是其中任意两种状态. 对个人来讲, 判别两种状态“好”“坏”的准则是偏好关系. 即设某消费者 i 的效用函数为 $u_i(x)$, 则

$$A \leq B \Leftrightarrow u_i(A) \leq u_i(B);$$

$$A < B \Leftrightarrow u_i(A) < u_i(B);$$

$$A \sim B \Leftrightarrow u_i(A) = u_i(B).$$

对于生产者来说, 生产要素在生产者之间的配置状态的“好”“坏”, 是用生产函数来判别的. 设某厂商的生产函数为 $f(x)$, 则任意两种生产要素配置状态 A, B , 判别“好”“坏”的标准是

$$A \leq B \Leftrightarrow f(A) \leq f(B);$$

$$A < B \Leftrightarrow f(A) < f(B);$$

$$A \sim B \Leftrightarrow f(A) = f(B).$$

从社会的角度来看, 有多个消费者和生产者, 何为社会福利最优的配置状态, 其检验标准是什么? 是否存在使每个社会成员都满意的经济状态? 这些都是本文讨论的内容.

一个纯交换的经济系统中, 有 n 个消费者, m 种产品.^②

$x_j = (x_1^j, \dots, x_m^j)^T \in E_+^m$, 是第 j 个消费者对 m 种产品的消费量, $j = 1, \dots, n$;

ω 是第 i 种产品的总量, $i = 1, \dots, m$;

$u_j(x^j)$ 是第 j 个消费者的效用函数, $j = 1, \dots, n$.

这里, 假设效用函数 $u_j(x^j)$ 满足

1. $u_j(x^j)$ 是连续的, 并且具有连续的一阶和二阶偏导数;

2. $u_j(x^j)$ 是严格凹函数;

3. $u_j(x^j)$ 是严格单调增函数, 即 $\frac{\partial u_j(x^j)}{\partial x_i} > 0$

中央权威(社会决策者)追求福利最优的经济状态, 希望每个消费者的效用最大, 因此是一多目标问题. 建立福利最大的多目标模型

$$(VP) \begin{cases} V - \max(u_1(x^1), \dots, u_n(x^n)) = U(X) \\ s.t. \quad \sum_{j=1}^n x_i^j \leq \omega, i = 1, \dots, m \\ x^j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{cases}$$

令 $R = \left\{ (x^1, \dots, x^n) \mid \sum_{j=1}^n x_i^j \leq \omega, i = 1, \dots, m, x^j \geq 0, j = 1, \dots, n \right\}$, 是可行配置的集合. 即

^② 本文以纯交换经济为例, 同理可研究生产经济和交换与生产同时存在的情况.

③ $\forall X \in R$, 都是一个可行的资源配置状态.

定义1 设 $\bar{X} \in R$, 若不存在 $X \in R$, 使得

$$U(\bar{X}) \leq U(X)$$

则称 $\bar{X} = (x^1, \dots, x^m)$ 是 (VP) 的有效解 (Pareto 解). 记多目标规划 (VP) 的 Pareto 解的全体为 R_{PO}^* .

定义2 设 $\bar{X} \in R$, 若不存在 $X \in R$, 使得

$$U(\bar{X}) < U(X)$$

则称 $\bar{X} = (x^1, \dots, x^m)$ 是 (VP) 的弱有效解 (弱 Pareto 解). 记多目标规划 (VP) 的弱 Pareto 解的全体为 R_{wP}^* .

考虑多目标规划 (VP) 对应的线性加权和问题

$$(P_\alpha) \begin{cases} \max & \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j(x^j) \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^n x_j^i \leq \omega, i = 1, \dots, m \\ & x_j^j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{cases}$$

这里

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in \Lambda^+ = \left\{ \alpha \mid \sum_{j=1}^n \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0, j = 1, \dots, n \right\}.$$

引理1 设 $\bar{X}$ 是 (P_α) 的最优解, $\alpha \in \Lambda^+$, 则 $\bar{X}$ 是 (VP) 的弱 Pareto 解.^③

引理2 设 $\bar{X}$ 是 (VP) 的弱 Pareto 解, 则存在 $\bar{\alpha} \in \Lambda^+$, 使得 $\bar{X}$ 是 $(P_{\bar{\alpha}})$ 的最优解.

引理3 设 $\bar{X}$ 是 $(P_{\bar{\alpha}})$ 的最优解, $\alpha \in \Lambda^+$, $\alpha > 0$, 则 $\bar{X}$ 是 (VP) 的 Pareto 解.

引理3表明, 线性加权函数可以看作是一个社会福利函数, 即 $W = \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j(x^j)$. 在这样的社会福利函数下选择的福利最大状态一定是帕累托最优状态, 并且福利函数中的权数代表了社会决策者对不同社会成员的偏好程度.

§3 帕累托最优状态

帕累托最优标准是检验经济状态是否“最优”的最基本的福利标准. 如果至少有一人认为 A 优于 B , 而没有人认为 A 劣于 B , 则认为从社会的观点看也有 A 优于 B . 这就是所谓的帕累托最优状态标准, 简称帕累托标准. 利用帕累托最优状态标准, 可对资源配置状态的任意变化做出“好”与“坏”的判断: 如果既定的资源配置状态的改变使得至少有一个人的状态变好, 而没有使任何人的状态变坏, 则认为这种资源配置状态的变化是“好”的; 否则认为是“坏”的. 称这种以帕累托标准来衡量“好”的状态改变为帕累托改进. 利用帕累托标准和帕累托改进, 可以定义“最优”资源配置.

定义3 如果对于某种既定的资源配置状态, 所有的帕累托改进均不存在, 即在该状态上, 任意改变都不可能使至少有一个人的状态变好而又不使任何人的状态变坏, 则称这种资源

③ 关于多目标规划相关理论, 见魏权龄、王目爽、徐兵, 《数学规划引论》, 北京航空航天大学出版社.

配置状态为帕累托最优状态.

定义 4 所有帕累托最优状态的集合称为契约曲线.也就是多目标规划(VP)的 Pareto 解的全体, R_{pa}^* .

显然,有

定理 1 可行资源配置状态 X 是帕累托最优状态的充分必要条件是 X 是(VP)的 Pareto 解.

下面给出帕累托最优条件,详细证明见参考文献[1].

定理 2 设 $\bar{X}$ 是(VP)的 Pareto 解,则一定有

$$\frac{\partial u_i(\bar{x}^+)}{\partial x_i} / \frac{\partial x_i}{q_i} = \frac{\bar{q}_i}{q_i}, j = 1, \cdots, n, i, l = 1, \cdots, m \quad (1)$$

定理 2 说明,帕累托最优状态必须满足条件:在该状态下,所有消费者在每对产品之间的边际替代率都相等.这就是帕累托最优条件.这里,帕累托最优状态的 Kuhn-Tucker 乘子 $\bar{q}_i$ 、 $\bar{q}_l$ 都是正数,它们是资源的影子价格.由每个消费者追求自身效用最大化,得到资源的影子价格等于其市场价格.

§ 4 弱帕累托最优状态

设 A 和 B 是任意两种可行配置状态.如果每个人都认为 A 优于 B ,则认为从社会的观点看也有 A 优于 B ,这就是所谓的弱帕累托最优状态标准,简称弱帕累托标准.利用弱帕累托最优状态标准,可对资源配置状态的任意变化做出“好”与“坏”的判断:如果既定的资源配置状态的改变使得每个人的状态都变好,则认为这种资源配置状态的变化是“好”的;否则认为是“坏”的.称这种以帕累托标准来衡量“好”的状态改变为弱帕累托改进.利用弱帕累托标准和弱帕累托改进,可以定义这种意义下的“最优”资源配置.

定义 5 如果对于某种既定的资源配置状态,所有的弱帕累托改进均不存在,即在该状态上,任意改变都不可能使每个人的状态变好,则称这种资源配置状态为弱帕累托最优状态.

由弱 Pareto 解的定义,得到定理 3

定理 3 可行资源配置状态 $\bar{X}$ 是弱帕累托最优状态的充分必要条件是 $\bar{X}$ 是(VP)的弱 Pareto 解.

由多目标规划解的性质有 $R_{pa}^* \subseteq R_{wp}^*$,即帕累托最优状态一定是弱帕累托最优状态.

§ 5 非支配最优状态

前面讨论了帕累托最优状态和弱帕累托最优状态,结果表明帕累托最优状态有无穷多个,它们之间是无法进行比较的.在这些帕累托最优状态中选择出一个或某些个的方法是确定社会福利函数,找出使社会福利函数最大的帕累托最优状态.社会福利函数代表了社会决策者的偏好.而这一节给出判别资源配置“好”“坏”的非支配标准,在判别标准中就体现了社会决策者的偏好.这样就缩小了“最优”配置的集合,并且集合中的每一个配置状态都体现了社会决策者的偏好.

设社会决策者对不同社会成员的偏好体现为每个成员的权,要求权 α 满足 $\alpha \in W$,这里 W

$\subseteq E^n$ 是闭凸锥 A 和 B 是任意两种可行的资源配置状态, 则在考虑决策者偏好的情况下, 判别两种状态“好”“坏”的广义判别准则是

定义 6 广义判别准则

$$A \preceq B \Leftrightarrow U(B) \in U(A) + W^*;$$

$$A \prec B \Leftrightarrow U(B) \in U(A) + W^* \setminus \{0\};$$

$$A \sim B \Leftrightarrow U(B) = U(A).$$

这里, W^* 是 W 的正极锥, 即 $W^* = \{y \mid y^T x \geq 0, \forall x \in W\}$. 显然, 若 $W = E^n$, 则 $W^* = E^n$, 此时广义判别准则与帕累托准则相同.

我们称广义判别准则为非支配最优标准, 简称非支配标准. 也就是, 如果状态 B 可由状态 A 沿着 W^* 的方向达到, 则状态 B 优于状态 A . 如果既定的资源配置状态的改变, 使得新的配置状态在广义判别准则下优于原配置状态, 则这种变化称为非支配改进. 利用非支配标准和非支配改进, 可以定义体现决策者偏好的非支配最优状态.

定义 7 如果对于某种既定的资源配置状态, 所有的非支配改进均不存在. 即在该状态上无法沿着 W^* 方向达到新的可行资源配置状态, 则称这种资源配置状态为非支配最优状态.

定义 8 设 $\bar{X} \in R$, 若不存在 $X \in R$, 满足

$$U(X) \in U(\bar{X}) + W^*, U(X) \neq U(\bar{X})$$

则称 $\bar{X}$ 是多目标规划 (VP) 关于 W^* 的非支配解. 记 (VP) 关于 W^* 的非支配解的全体为 $R(W^*)$.

定理 4 可行资源配置状态 $\bar{X}$ 是非支配最优状态的充分必要条件是 $\bar{X}$ 是多目标规划 (VP) 关于 W^* 的非支配解.

例 1 设在两个消费者两种产品的模型中, 决策者对两个消费者的偏好为, 要求权满足 $\frac{1}{2} < \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 2$. 也就是

$$W = \{(\lambda_1, \lambda_2) \mid -\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 0, 2\lambda_1 - \lambda_2 > 0\}$$

它的正极锥为

$$\begin{aligned} W^* &= \{(d_1, d_2) \mid d_1\lambda_1 + d_2\lambda_2 \geq 0, (\lambda_1, \lambda_2) \in W\} \\ &= \{\alpha_1(-1, 2) + \alpha_2(2, -1) \mid \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0\} \\ &= \{(-\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_1 - \alpha_2) \mid \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0\} \end{aligned}$$

那么此时的判别准则意味着, 若 x 比 y 好, 可能出现 $u_1(x) > u_1(y)$, $u_2(x) < u_2(y)$ 或者 $u_1(x) < u_1(y)$, $u_2(x) > u_2(y)$ 的情况, 而不是帕累托标准下的“越大越好”.

由多目标规划解的性质, Pareto 解, 弱 Pareto 解, 非支配解的关系是 $R(W^*) \subseteq R_{pa}^* \subseteq R_{wp}^*$.

§6 小 结

无论在何种经济体制下, 每个政府(社会决策者)都力图采取各种措施使得经济运行实现福利最大, 本文运用多目标数学规划理论, 研究分析福利经济学中的问题, 推广了判别准则, 使之更符合实际情况, 是对福利经济学的发展.

④ 福利经济学第一,第二定理^④表明,完全竞争市场得到的瓦尔拉斯均衡是帕累托最优状态,即市场经济体制是有效率的经济体制,但是瓦尔拉斯均衡不一定是对大多数人有利的经济状态,所以在市场经济条件下,需要政府对经济运行的调控.在这种情况下,决策者对不同的社会成员具有不同的偏好,那么评价资源配置状态的标准就是非支配标准.由此可见,帕累托标准到非支配标准的推广具有极强的经济意义.

本章提出和研究的问题对于研究和思考我国社会主义经济运行也有参考和实际意义.例如,对社会主义经济运行如何进行评价,评价的标准是什么?如何评价我国实施的经济政策带来的福利变化?如允许一部分人先富起来,而使另一部分人的生活水平下降,是否要进行补偿?目前实施的西部大开发战略,实际上就是决策者对某一地区具有特殊偏好,就可以用非支配最优标准来评价这一政策会对全国的经济运行有何影响?这些问题,都是社会主义经济运行需要解决的问题.

参 考 文 献

- [1] 韩 松, 前沿面分析方法与资源配置问题, 中国人民大学博士学位论文, 2001, 6.
- [2] Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston, and Jerry R. Green, *Microeconomic Theory*, 1995.
- [3] 高鸿业, 西方经济学(上册微观部分), 中国经济出版社, 1998.
- [4] 魏叔龄, 王日爽, 徐兵, 数学规划引论, 北京航空航天大学出版社, 1985.
- [5] 瓦里安, 高级微观经济学(第三版), 经济科学出版社, 1998.

MULTI-OBJECTIVE PROGRAMMING AND WELFARE EVALUATION CRITERION

Han Song

(The Institute of Operational Research and Mathematical Economics, Renmin University
of China, Beijing, 100872)

Abstract Welfare economics is evaluating various allocations. Economists evaluate policy basing on welfare criterion. So study on welfare criterion is one of the most important problems. Pareto optimality is a popular criterion, but sometime it can't reflect real economic situation. In this paper, we give multi-objective programming model for social welfare optimality, study social optimal welfare situation and welfare criterion using multi-objective programming theory, and expend Pareto criterion to weak Pareto criterion and non-dominated criterion.

Key words multi-objective programming, Pareto optimality, weak Pareto optimality, non-dominated Optimality

④ 参考文献[5]