效用空间与局部非饱和性：一个证明性简述

管毅平[*] 陈启欢[†]

（上海交通大学 管理学院 经济与金融系，200052）

提要：高级微观经济学教材关于局部非饱和性的定义是基于某单点展开的。本文将局部非饱和性的定义，由单点推广至更复杂的多点等效用空间。我们通过分析发现，异质点集 AH 的稠密性是多点等效用空间是否具备局部非饱和性的关键。我们利用二维测度知识，进一步得到了多点空间局部非饱和性的判断公式，并使用上述判断规则，对一例高级微观经济学习题进行了可能富有新意的解析。

关键词：局部非饱和性；多点等效用空间；异质点集

Utility Space and Local Nonsatiation: A Verifiably Brief Statement

*Guan Yiping** *Chen Qihuan*[†]

Abstract: In the textbook of advanced microeconomics, the definition of local nonsatiation is based on certain single point. This paper extends the definition of local nonsatiatio from a single point to more complicated iso-utility space with multiple points. It has found that the density of a set of peculiar points AH is the key on which wether or not has the property of local nonsatiation through analysing of the iso-utility space, and then has further gained a equation of judgment of local nonsatiation on iso-utility space by means of two-measure. Using the equation of judgment, our analysis of an exercise of advanced microeconomics may have some new meaning.

Keywords: local nonsatiation；iso-utility space with multiple points；set of peculiar points

一、问题的缘起：局部非饱和性及其理解的困难

在《高级微观经济学》课程的教学中，经典效用论关于经济学理性偏好的几个公理性假设，相当抽象，较难以实例说明，是教与学的难点。其中，“局部非饱和性”假设，比起完备性、传递性、连续性、单调性和凸性等几个假设，似乎更难于解说清楚。

在国内外较为通行的高级微观经济学教科书中，例如 Varian（1992，p.96），较为简洁的局部非饱和性假设的陈述是这样的：

局部非饱和性（LOCAL NONSATIATION）。 给定 $x \in X$ 以及任意的 $\varepsilon > 0$，则存在某消费束 $y \in X$，满足 $|x-y| < \varepsilon$，使得 $y \succ x$。

---

[*] 管毅平，上海交通大学 管理学院 经济与金融系 教授，经济学博士。联系方式：电话：021－52301175；Email: ypguan@sjtu.edu.cn；邮编 200052，上海法华镇路 535 号 上海交通大学管理学院。

[†] 陈启欢，上海交通大学 管理学院 经济与金融系 博士生。

与之相关的局部非饱和性偏好的检验如图 1。对于任意消费束 x∈X＝R_+^K，在一个任意小的距 x 的距离 ε＞0 内，均存在优于 x 的另一个消费束 y∈R_+^K（y 中的所有商品可能比 x 中的少，如图）。

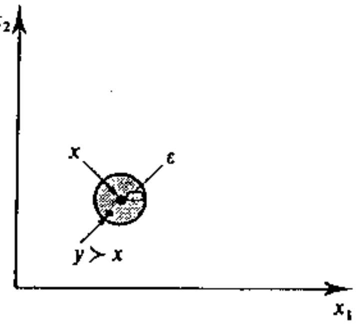
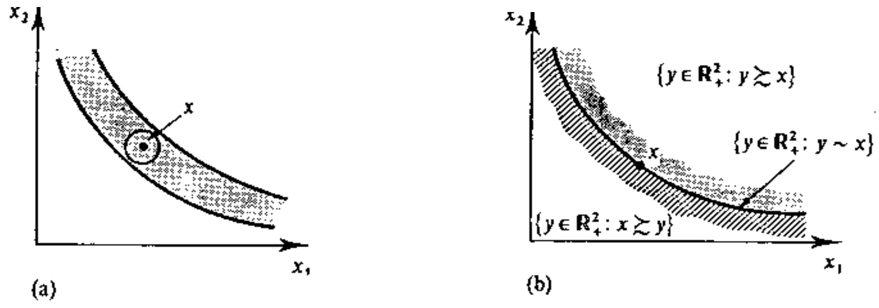


图 1 局部非饱和性偏好的检验

对于上述假设及其检验，教科书的相应直观释义是：即使一个人被局限于消费束中做很小的变动，他（她）也总能做出稍微更好一些的选择。

为了便于理解，有的教科书常常以涵义更强也更显豁的“单调性”的释义来辅助说明：如果商品是“好东西”而不是“坏东西"，则更大数量的商品优于更小数量的商品，即“多多益善"。而且，即便某种商品是“坏东西"，我们仍然能够以另外一种方式来重新定义消费活动，满足单调性偏好。例如，如果有一种商品是垃圾，我们就可以把个人消费定义在“垃圾的消除”上。由于单调性是比局部非饱和性更强的假设，因此满足单调性必定满足局部非饱和性。在正的实数集合中，单调性一般性地排除了商品是“坏东西”的情形，局部非饱和性当然也就排除了所有商品是“坏东西”的极端情形（参看 Mas-Colell, Whinston and Green, 1995，p.42－43）。

以上都还能够解说得大致清楚，接下来的内容就有些难度了。如图 2 所示，（a）幅说明，局部非饱和性排除了“厚的”无差异集（等效用集）的情况，因为如果（a）的情况满足局部非饱和性，则以 x 为中心的圆中就会有至少一个优于 x 的点，而这与“无差异”的假设相悖。（b）幅则说明，其中的实线表示的包含点 x 的无差异集，是所有与 x 无差异的消费束的集合，即{y∈X: y～x}。而分别处于此无差异集左下的下等值集{y∈X: x≿y}和右上的上等值集{y∈X: y≿x}，则与局部非饱和性的偏好相容。



（a）厚的无差异集与局部非饱和性不相容　　（b）与局部非饱和性相容的偏好

图 2 局部非饱和性的不相容与相容

这里的问题是：如果（a）幅中的厚的无差异集收缩为薄的无差异集，性质会否改变？

如果（b）幅中的无差异集移动，其本身满足局部饱和性，与满足局部非饱和性的下等值集和上等值集的关系又将如何？在课堂上，博士生同学不止一次地这样问任课教师。困难在于对于局部非饱和性理论的数学展开和深入理解，以及在此基础上的教学分析和解说。

带着这些问题，笔者请教了一些教过《高级微观经济学》课程的教师和数学系出身的博士、硕士生，都没有获得比教科书稍微深入一步的答复，难于令人满意。我们推想，这个问题也许有一定的代表性，不同程度地困惑了不少同学和教师。这是我们写作本文的初始动机。另外，我们没有检索到与本文内容相近的国内外文献，也许这个问题不是与现实关联的经济问题，同行未必会感兴趣。但是，对于中国时下不断推广的高级经济学教学来说，这个问题显然是绕不过去的，很可能会被越来越多的学人提出。因此，我们在初步学习和研究之后，从集合论和测度论的角度，不揣谫陋地给出一个对于局部非饱和性的尝试性分析。这对于深入理解这部分理论，或许有益，至少是提供一个可以继续讨论和批评的文本。

本文第二节和第三节的分析，涉及效用空间的分析，以及非饱和效用空间的判断，仅仅是针对有关局部非饱和性假设的证明性简述，而不是严格的数学证明。第四节，是从应用角度，运用上述分析及其推论，以不同于传统的视角分析一例习题中的问题。第五节是全文的结论。

二、效用空间性质的分析

我们认为，传统的局部非饱和性定义是基于某单点展开的，只要该单点在任意小空间内不是最优选择，则该点满足局部非饱和性。这也是一些高级微观经济学教材中局部非饱和性一般定义的数学特征。下面，我们结合图示，分析效用空间与局部非饱和性相关的性质。

图 3 中，横坐标为物品 1，纵坐标为物品 2， d1 和 d2 线所夹的空间是二维的等效用面，即厚的无差异集。显然，只要 d1 和 d2 线不重合，此无差异集就不符合局部非饱和性质。但问题是，当此两线夹逼于如图示的 d 线时，d 如何满足局部非饱和性质。

让我们先分析 d1 和 d2 线所夹的空间的性质，以及该空间以外空间的性质。

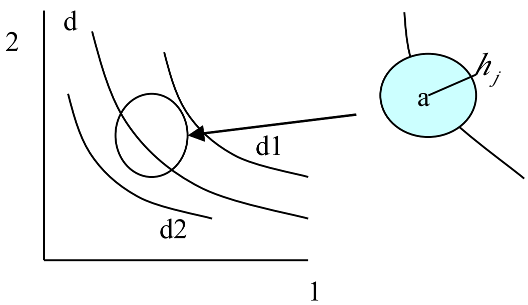


图 3

首先假设，d1 和 d2 线所夹的空间，是一般的效用空间，不一定是等效用空间。我们的问题是：在什么条件下，这一空间具有局部非饱和性质？不妨在该效用空间内任取一点 a，并取一包括 a 的半径 r。设与点 a 效用相等的点的集合为 E，其内的点 $e_i \in E$；大于点 a 效用的点的集合为 H，其内的点 $h_j \in H$。则根据 a 和 E、H 的关系，存在如下四种情况：

（1）如果 $r \subset E$，则 a 具有局部饱和性；

（2）如果在 r 的半径区域内含有 H 的点且数量有限，记之为 h_j， $j = 1,2,\cdots$。选取离点 a 最近的 h_i，二者距离为 ε，任取区域 $r(a,x) < \varepsilon$，易得 a 点是局部饱和的；

（3）当 h_i 数量无限多，但不收敛于 a 时，如上可证点 a 具有局部饱和性；

（4）当 h_i 数量无限多，且收敛于 a 时，则任取 $\varepsilon > 0$，在 $r(a,x) < \varepsilon$ 的区域内存在无数个 h_i，则点 a 具有局部非饱和性。

至此我们已经讨论了 d1－d2 线所夹空间的性质，得出的结论是：在等效用空间，不存在收敛于其内一点的异质点 h_i（仅指效用高于该点效用的异质点）。这意味着，一个二维空间内的点 h_i 是疏朗的（夏道行等，1987，p.58－59）。我们权且称具备这种疏朗性质的空间为 AE。于是，高级微观经济学教材中，有关偏好的公理性假设之一的“局部非饱和性”的说明中，所谓“厚”的无差异集（等效用集），就具有 AE 空间的疏朗性质，也即不满足局部非饱和性（参看本文前节内容及其参考文献）。相对地，如果某空间内 h_i 稠密，则称该空间为 AH，AH 空间内的任意点都是非饱和的。

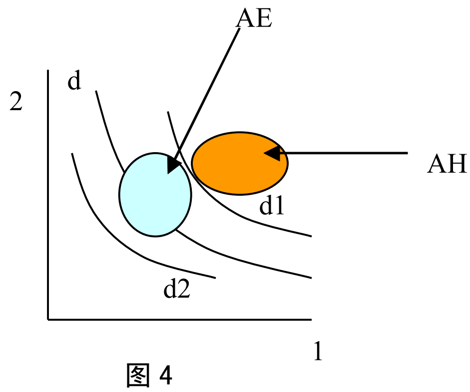


图 4

如图 4，AE 和 AH 的性质界定了 d1 和 d2 线的位置和性质：由 d1 和 d2 线所夹的空间的等效用假设可知：所夹的空间是 AE 性质的空间，而 d1 和 d2 以外的空间是 AH 性质的空间。d1 和 d2 线位于 AE 与 AH 的交界，它们一边面向 AE，一边面向 AH，因此 d1 和 d2 是具有非饱和性的等效用线，而且 AE 必是闭的。

三、非饱和效用空间的判断

上文将局部非饱和性的定义由单点推广至更复杂的多点等效用空间。多点等效用空间的一般形态极其复杂，在不考虑空间连续性、单调性等假设时，把单点局部非饱和性拓展至多点空间局部非饱和性，需要新的判断规则，也即在考虑连续性和单调性之前，就定义多点空间局部非饱和性需要新的判断标准。换个说法，在讨论了上面的等效用空间的性质后，我们要进一步讨论的问题是：某一效用空间，在什么条件下具备非饱和性？在什么条件下具备饱和性？

设 (β^2, L, m) 是 Lesbesgue 的二维测度空间，X 是 AH 的全点集，有 $X \in \beta^2$。于是 $m(X) \geq 0$（于寅，1999，p.249）。

当 $m(X) = 0$ 时，d 线上的任一点 a，总能找到一区域 $r(a,x) > 0$，使得 a 点具有饱和性（徐森林，2002，p.138－139）。

当 $m(X) > 0$ 时（例如 d1 和 d2 夹逼至 d 处），不再具有上述性质。因为任意 $r(a,x) > 0$ 都包含有无限个 h_i，故 d 具有非饱和性。即如果任意等效用集 X 的 AH 空间的 m 测度大于零，其等效用集 X 就具有非饱和性（而与 X 的形状、连续与否无关）。

对于上述分析，一个直观一点的解释是：对于 AE 空间，如果等效用空间被异效用点（例如这里的大于 d 的效用点）破坏，产生了许多孔，但这些孔是疏朗的，不至于影响该空间的

性质。

而 AH 空间则相反：等效用集 X 处于 AH 空间内，处处都是稠密的异质孔，因而必然具有非饱和性。

对于 d 线饱和性的突变，不应该只从 d 线静止不动的角度来看，而应该从 d1、d2 线的运动来看。因为 d1、d2 线是边界，是非饱和的，它们运动到哪里，就把非饱和边界推展到哪里。当它们重合于 d 线处，必然就把非饱和性带到了 d 线。当然，还应存在另外一类异质点 k_i，它们的效用低于 d 的效用，上文并没有讨论，但只要 d 不是全域最高效用集，增加了 k_i 并不影响上述结论。我们要区分的应该仅仅是，d1 和 d2 线，何者面临稠密的 h_i，何者面临稠密的 k_i。

我们在上面只就二维物品的等效用集进行了讨论，至于多维的情况，稍微复杂，但道理是一样的，这里不赘。

四、运用上述分析及其推论，分析有关习题中的问题

运用上述分析及其推论，可以从不同的视角，分析《高级微观经济学》某些相关习题中的问题，得出不同于一般解的有意思结论。让我们以 Varian（1992，p.114）中的习题 7.1 为例。原题是：

7.1 如果 $x_1+x_2<y_1+y_2$，考虑由（ x_1+x_2 ）$\succ$（ y_1+y_2 ）定义在非负正交分划体（非负象限的 n 维模拟）上的偏好。这些偏好展示了局部非饱和性么？如果这些偏好只涉及两种消费品，而且消费者面临正的价格，消费者会花费他的所有收入么？请解释。

解法 1 依据教科书理论的传统解法。依题意，在 $x_1+x_2<y_1+y_2$ 且（ x_1+x_2 ）$\succ$（ y_1+y_2 ）时，消费集中只包括两种物品 1、2，则物品 1、2 的数量组合越少，则越受消费者偏好，即其效用越大。于是在非负消费子集中，（0，0）的数量组合最小，故其效用最大。根据定义，该点为局部饱和点。除（0，0）外，其余偏好集均满足局部非饱和性。因此，追求自身效用最大化的理性的消费者，在这一消费集中面对正的价格，将选择这一点（0，0）“消费”，实为不消费物品 1、2，所以他不花费任何收入。这里的物品 1、2，可以被消费者看作是厌恶品，诸如污染物、噪声等“坏东西”。对于坏东西，不消费是最优的选择。

注意，解法 1 只是直接根据教材关于局部非饱和性的定义做出的判断性回答。这回答是对的，却不深入，没有把“所以然”说清楚。至于为什么说不清楚，至少现有的一般教材提供的理论无力进一步回答。下面就运用本文前面的分析和推论，来尝试给出解法 2，以求进一步在理论上明了局部非饱和性的“所以然”。

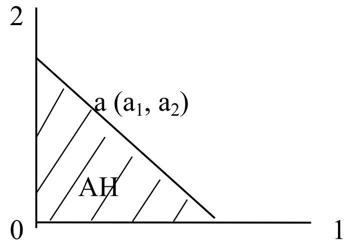


图 5

解法 2 以文本第二、三节的分析结果求解。首先分析二维效用空间的零点。如图 5，对于任何非负的消费集（x_1, x_2），都有 $x_1 + x_2 > 0$。根据题意，大于零点的效用点集（设为 AH_0）在图中不存在，是个空集，对该点集求测度有：$m(AH_0) = 0$。根据非饱和效用空间的判断规则，可得结论：效用空间的零点是饱和点。

其次分析零点以外的任何一非负消费点 a（a_1, a_2）。按题设，低于线段 $x_1 + x_2 = a_1 + a_2$（$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$）的非负消费点构成了 AH 集。由于该 AH 集的点是稠密的，对该点集求测度有：$m(AH) > 0$。根据非饱和效用空间的判断规则，可得结论：点 a 是非饱和点。由于点 a 是任意取的，所以除零点以外的所有非负消费集都具有非饱和性。

五、结论

传统的局部非饱和性定义是基于某单点展开的，只要该单点在任意小空间内不是最优选择，则该点满足局部非饱和性。这也是一些高级微观经济学教材中局部非饱和性一般定义的数学特征。本文将局部非饱和性的定义由单点推广至更复杂的多点等效用空间。多点等效用空间的一般形态极其复杂，在不考虑空间连续性、单调性等假设时，把单点局部非饱和性拓展至多点空间局部非饱和性，需要新的判断规则，也即在考虑连续性和单调性之前，就定义多点空间局部非饱和性需要新的判断标准。通过对等效用空间更优的异质点集 AH 的分析，发现异质点集 AH 的稠密性是多点等效用空间是否具备局部非饱和性的关键：如果 AH 集稠密，则该空间就具备局部非饱和性；反之，如果 AH 集疏朗，则该空间就不具备局部非饱和性。利用 Lesbesgue 二维测度，可以进一步得到多点空间局部非饱和性的判断公式。本文还进一步使用了上述判断规则，对一例高级微观经济学习题进行了可能富有新意的解析。

我们这里的探讨是尝试性的，必定存在着差误，我们期待着专家的批评。

参考文献：

Mas-Colell, A., Whinston, M.D., and Green, J.R., 1995, Microeconomic Theory, New York: Oxford University Press.

Varian H. R., Microeconomic Analysis, 3rd ed., New York: Norton, 1992.

马斯－科莱尔、温斯顿和格林：《微观经济学》，中译本，北京：中国社会科学出版社，2001。

瓦里安：《微观经济学（高级教程）》，中译本，北京：经济科学出版社，1997。

夏道行等：《实变函数论与泛函分析》，北京：高等教育出版社，1987，第二版。

徐森林：《实变函数论》，合肥：中国科技大学出版社，2002。

于寅：《近代数学基础》，武汉：华中理工大学出版社，1999。